Demonstrações especiais

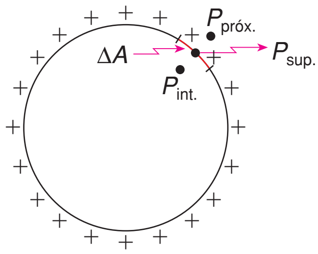
1ª) RELAÇÃO ENTRE $\vec{E}_{\text{próx.}}$ e $\vec{E}_{\text{sup.}}$

Considere um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático. Seja $P_{\text{sup.}}$ um ponto da superfície e $P_{\text{próx.}}$ um ponto externo e infinitamente próximo de $P_{\text{sup.}}$. Demonstremos que $\vec{E}_{\text{próx.}} = 2\vec{E}_{\text{sup.}}$

Vamos dividir as cargas elétricas em excesso em duas partes:

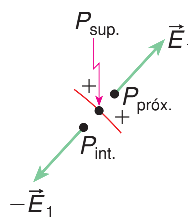
1ª parte: cargas elétricas que se situam no elemento de área ΔA e que contém $P_{\text{sup.}}$

2ª parte: demais cargas elétricas.



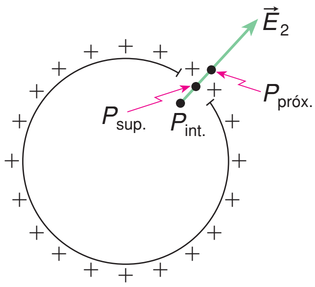
O ponto $P_{\text{int.}}$ é interno e infinitamente próximo a $P_{\text{sup.}}$

Campo devido à primeira parte de cargas



Em $P_{\text{próx.}}$ e em $P_{\text{int.}}$ os campos diferem apenas em sentido. Em $P_{\text{sup.}}$ o campo é nulo, pois $P_{\text{sup.}}$ é o centro desta pequena distribuição de cargas.

Campo devido à segunda parte de cargas



Os pontos $P_{\text{próx.}}$, $P_{\text{sup.}}$ e $P_{\text{int.}}$ podem ser considerados coincidentes, relativamente a esta segunda parte de cargas. Portanto, o campo produzido nos três pontos é o mesmo $\vec{E}_2$.

Campo total

No ponto $P_{\text{int.}}$, o campo é nulo. Logo:

$$-\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \quad ①$$

No ponto $P_{\text{sup.}}$, temos:

$$\vec{E}_{\text{sup.}} = \vec{E}_2 \quad ②$$

No ponto $P_{\text{próx.}}$, temos:

$$\vec{E}_{\text{próx.}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad ③$$

Demonstrações especiais

Mas de ①, vem: $\vec{E}_{próx.} = 2\vec{E}_2$ ④

De ② e ③: $\boxed{\vec{E}_{próx.} = 2\vec{E}_{sup.}}$

Em módulo, temos: $\boxed{E_{próx.} = 2E_{sup.}}$

2ª) FLUXO ELÉTRICO – TEOREMA DE GAUSS

1. Fluxo φ de um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ através de uma superfície plana de área *A*

Esse fluxo φ é por definição a grandeza escalar:

$$\boxed{\varphi = E \cdot A \cdot \cos \alpha}$$

em que α é o ângulo entre o vetor campo elétrico $\vec{E}$ e o versor $\vec{n}$, perpendicular à superfície plana de área *A* (figura I).

Unidade de fluxo do campo elétrico no Sistema Internacional: $\frac{N \cdot m^2}{C}$ ou V · m

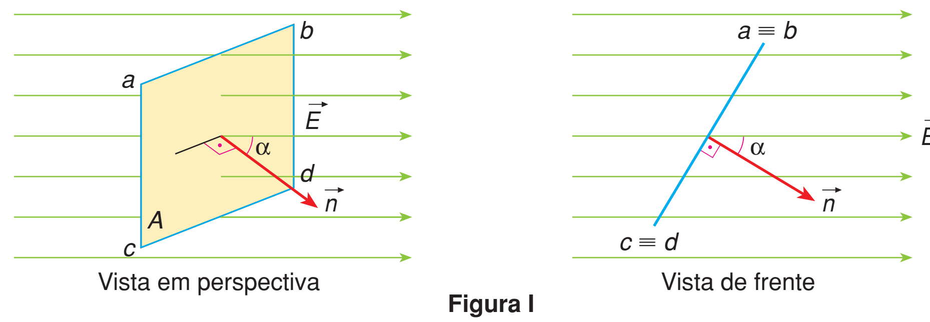


Figura I

Nas figuras IIa e IIb, analisamos algumas situações particulares.

Da figura IIa notamos que o fluxo é máximo, pois $\alpha = 0°$ e $\cos 0° = 1$ ($\varphi_{máx.} = E \cdot A$) e máximo é o número de linhas de força que atravessa a superfície.

Da figura IIb notamos que o fluxo é nulo, pois $\alpha = 90°$ e $\cos 90° = 0$ ($\varphi = 0$) e nenhuma linha de força atravessa a superfície.

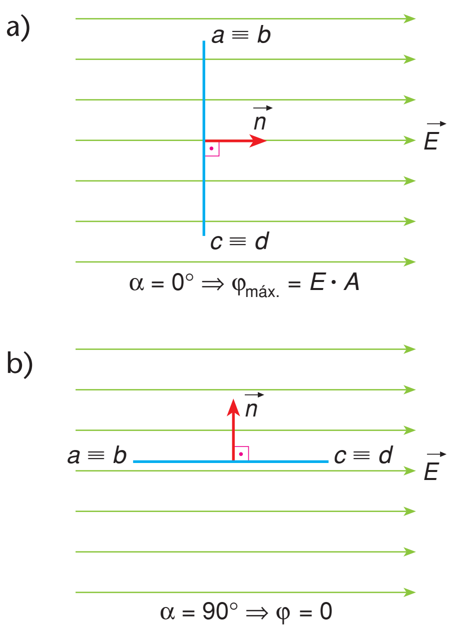


Figura II

Podemos interpretar o fluxo como sendo **a grandeza que mede o número de linhas de força que atravessa a superfície.**

Observação:

Quando a superfície tiver forma qualquer e o campo não for uniforme, divide-se a superfície em elementos de superfície e considera-se em cada um o campo praticamente uniforme. Calcula-se o fluxo em cada elemento e, em seguida, somam-se os fluxos em todas as superfícies elementares.

2. Teorema de Gauss

Considere o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas elétricas. Nesse campo, vamos imaginar uma superfície fechada *S*. Em relação a essa superfície as cargas produtoras do campo podem ser internas ou externas. Não considere cargas pertencentes à superfície. O teorema de Gauss afirma que:

> Em uma superfície fechada, o fluxo do campo elétrico é proporcional à soma algébrica das cargas internas e independe das cargas externas.

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \Sigma\, Q_{int.}$$

e independe das cargas externas

sendo ε a permissividade do meio. Sabe-se que $\frac{1}{4\pi\varepsilon} = K$ (constante eletrostática do meio).

3. Campo nas proximidades de um condutor eletrizado

Seja *P* um ponto externo e infinitamente próximo da superfície de um condutor eletrizado positivamente (figura III). Considere a superfície fechada *S* contendo o ponto *P*. A superfície fechada que escolhemos para aplicar o teorema de Gauss é chamada **gaussiana.**

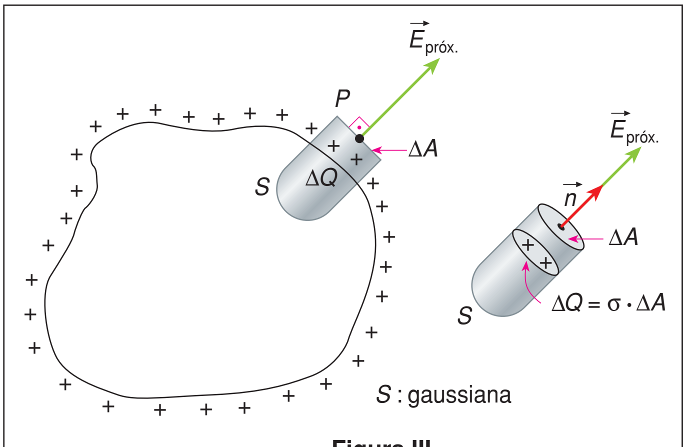


Figura III

Demonstrações especiais

Calculemos o fluxo pela definição e pelo teorema de Gauss. Seja ΔQ a carga do condutor que é interna à superfície S e pertencente à superfície do condutor de área ΔA.

Pela definição de fluxo, temos: $\varphi = E_{\text{próx.}} \cdot \Delta A$

Pelo teorema de Gauss, temos: $\varphi = \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \Delta Q$

Igualando as duas equações, vem: $E_{\text{próx.}} \cdot \Delta A = \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \Delta Q \Rightarrow E_{\text{próx.}} = \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\Delta Q}{\Delta A}$

Mas $\dfrac{\Delta Q}{\Delta A} = \sigma$, que é a densidade elétrica superficial. Logo: $\boxed{E_{\text{próx.}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}}$

Se o condutor estiver eletrizado negativamente, σ deve ser considerado em módulo.

Assim, temos: $\boxed{E_{\text{próx.}} = \dfrac{|\sigma|}{\varepsilon}}$

Para um condutor esférico, temos $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$. Logo, o campo num ponto externo e infinitamente próximo será:

$$E_{\text{próx.}} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon} \Rightarrow E_{\text{próx.}} = \frac{|Q|}{4\pi R^2 \cdot \varepsilon} \Rightarrow \boxed{E_{\text{próx.}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{|Q|}{R^2}} \text{ ou } \boxed{E_{\text{próx.}} = K \cdot \frac{|Q|}{R^2}}$$

Sendo $E_{\text{sup.}} = \dfrac{1}{2} \cdot E_{\text{próx.}}$, vem:

$$\boxed{E_{\text{sup.}} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{|Q|}{R^2}}$$

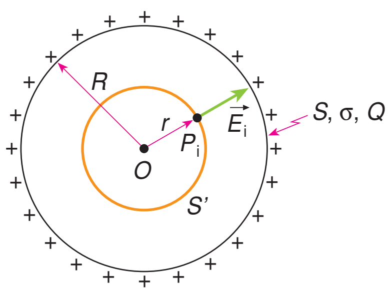
4. Campo nos pontos internos e nos pontos externos de uma superfície esférica S, de raio R, eletrizada uniformemente com carga elétrica Q, suposta positiva

Seja P_i um ponto interno à superfície S, distando r do centro O. Devido à simetria da distribuição de cargas, o campo elétrico em P_i, se existir, deve ser radial. A intensidade do campo em todos os pontos distanciados r de O é a mesma. Consideremos a superfície gaussiana S', de centro O e raio r e apliquemos o teorema de Gauss:

$\varphi_{S'} = \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \sum Q_{\text{int.}}$

Mas: $\sum Q_{\text{int.}} = 0$

Logo: $\varphi_{S'} = 0$



Pela definição de fluxo, sendo A' a área de S', vem: $\varphi_{S'} = E_i \cdot A'$

Sendo $\varphi_{S'} = 0$, resulta $E_i \cdot A' = 0$ e, portanto, $E_i = 0$, em qualquer ponto de S'. Raciocínio análogo pode ser feito para todos os pontos internos. Assim:

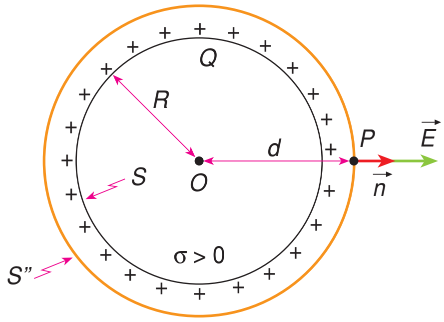
> É nulo o campo elétrico nos pontos internos de uma distribuição superficial esférica e uniforme de cargas.

Seja P um ponto externo à superfície S, distando d do centro O. Devido à simetria da distribuição de cargas, o campo elétrico em P deve ser radial. A intensidade do campo em todos os pontos distanciados d de O é a mesma. Consideremos a superfície gaussiana S'', de centro O e raio d e apliquemos o teorema de Gauss:

$$\varphi_{S''} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sum Q_{int.}$$

Mas: $\sum Q_{int.} = Q$

Logo: $\varphi_{S''} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q$ ①



Pela definição de fluxo, sendo $A'' = 4\pi d^2$ a área de S'', vem:

$\varphi_{S''} = E \cdot 4\pi d^2$ ②

De ① e ②, resulta:

$$E \cdot 4\pi d^2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{d^2}}, \quad \text{com } Q > 0$$

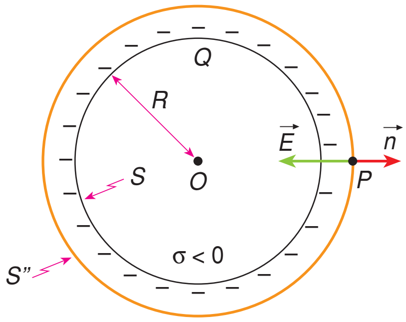
Se $Q < 0$, teríamos:

$\varphi_{S''} = -E \cdot 4\pi d^2$ (pois $\alpha = 180°$) ③

Igualando os módulos de ① e ③, vem:

$$E \cdot 4\pi d^2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot |Q|$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{|Q|}{d^2}}$$



3ª) ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA ARMAZENADA POR UM CAPACITOR

A demonstração da fórmula da energia potencial elétrica armazenada por um capacitor exige o uso de matemática do ensino superior. A título de ilustração, vamos fazer uma demonstração com recursos mais elementares.

Inicialmente vamos calcular a energia potencial elétrica armazenada por um condutor eletrizado com carga elétrica Q e sob potencial elétrico V.

Considere Q constituído de um número n muito grande de pequenas cargas q. Assim, temos $Q = n \cdot q$.

Demonstrações especiais

Vamos imaginar o condutor inicialmente neutro e carregá-lo trazendo as pequenas cargas q do infinito até o condutor. Em cada deslocamento de uma carga q, vamos calcular o trabalho da força aplicada pelo operador, lembrando que esse trabalho é igual ao trabalho da força elétrica com sinal trocado.

No deslocamento da primeira carga q, do infinito (potencial zero) até o condutor neutro (potencial inicial nulo), o trabalho da força aplicada pelo operador é nulo. Eletrizado com carga q, o condutor adquire potencial v.

Ao transportar a segunda carga q, o trabalho será $q \cdot v$. Agora o condutor armazena carga $2q$ e está sob potencial $2v$. Ao transportar a terceira carga q, o trabalho será $q \cdot 2v$ e assim sucessivamente, até a enésima carga q, quando o trabalho será $q \cdot (n - 1)v$.

A energia potencial elétrica W armazenada pelo condutor é dada pela soma dos trabalhos realizados pelo operador:

$$W = 0 + q \cdot v + q \cdot 2v + \dots + q \cdot (n - 1)v$$
$$W = q \cdot v(0 + 1 + 2 + \dots + n - 1)$$

Mas $0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 = \dfrac{0 + n - 1}{2} \cdot n$ é a soma dos termos de uma PA de n termos e razão igual a 1.

Assim, temos: $W = q \cdot v \cdot \dfrac{0 + n - 1}{2} \cdot n$

Sendo n um número muito grande, podemos fazer a aproximação $n - 1 \simeq n$. Então, vem:

$$W = q \cdot v \cdot \frac{n \cdot n}{2}$$

Como $Q = n \cdot q$ e $V = n \cdot v$, temos:

$$W = \frac{Q \cdot V}{2}$$

Para um capacitor, sendo Q a carga elétrica da armadura positiva e V_A seu potencial elétrico, e $-Q$ a carga elétrica da armadura negativa e V_B seu potencial elétrico, vem:

$$W = \frac{Q \cdot V_A}{2} + \frac{(-Q \cdot V_B)}{2} \Rightarrow W = \frac{Q(V_A - V_B)}{2} \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q \cdot U}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

R1. Uma superfície plana de área A = 9,0 cm^2 está imersa num campo elétrico uniforme de intensidade E = $2{,}0 \cdot 10^5$ N/C. Calcule o fluxo do campo nesta superfície nos casos:

a) A superfície está inclinada formando um ângulo de 30^0 com as linhas do campo.
b) A superfície está disposta perpendicularmente às linhas do campo.
c) A superfície está disposta paralelamente às linhas do campo.

Solução:
a) Se a superfície forma um ângulo de 30^0 com as linhas do campo, concluímos que o ângulo α entre o vetor campo elétrico e o versor $\vec{n}$, perpendicular à superfície, é de 60^0. Assim vem:

$$\varphi = E.A.\cos\alpha \Rightarrow \varphi = 2{,}0 \cdot 10^5 \cdot 9{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 60^0 \Rightarrow \varphi = 90\frac{N \cdot m^2}{C}$$

b) Neste caso $\alpha = 0$ (cos 0 = 1) e portanto $\varphi = 180\frac{N \cdot m^2}{C}$

c) Estando a superfície disposta paralelamente às linhas do campo, resulta que o ângulo o ângulo α entre o vetor campo elétrico e o versor $\vec{n}$, perpendicular à superfície, é de 90^0. Como cos 90^0 = 0 , vem : $\varphi = 0$

Respostas: a) $\varphi = 90\frac{N \cdot m^2}{C}$ b) $\varphi = 180\frac{N \cdot m^2}{C}$ c) $\varphi = 0$

R2. Uma carga elétrica puntiforme Q = 2,2 μC é colocada no centro de um cubo de aresta 5,0 cm. O meio é o vácuo ($\varepsilon = 8{,}8.10^{-12}$ F/m). Determine o fluxo do campo da carga Q na superfície do cubo.

Solução:
Pelo Teorema de Gauss sabemos que: em uma superfície fechada o fluxo do campo elétrico é proporcional á soma algébrica das cargas internas e independe das cargas externas, sendo dado por:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \Sigma Q_{int}$$

Sendo $\varepsilon = 8{,}8.10^{-12}$ F/m e $\sum Q_{int} = Q = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ C, resulta:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \Sigma Q_{int} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{8{,}8 \cdot 10^{-12}} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = 2{,}5 \cdot 10^{5} \frac{N \cdot m^2}{C}$$

Resposta: $\varphi = 2{,}5 \cdot 10^{5} \dfrac{N \cdot m^2}{C}$

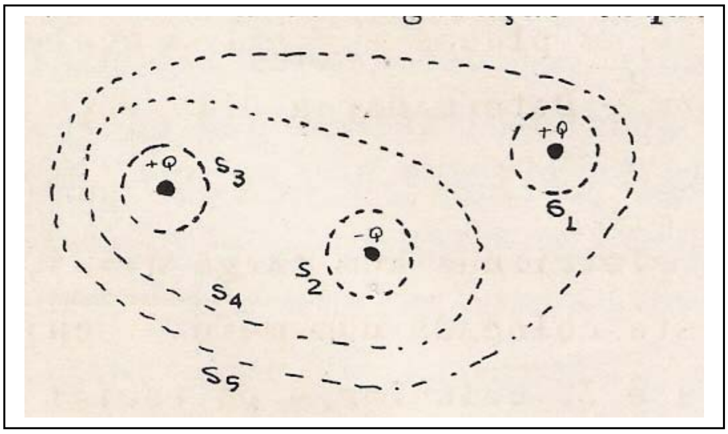
Exercícios Propostos

P1. Uma superfície plana de área A = 12 cm^2 está imersa num campo elétrico uniforme de intensidade E = $5{,}0 \cdot 10^5$ N/C, formando com as linhas de força do campo um ângulo θ. Calcule o fluxo do campo nesta superfície nos casos:

a) $\theta = 90^0$
b) $\theta = 60^0$
c) $\theta = 30^0$
d) $\theta = 0$

P2. Uma superfície plana de área A = 10 cm^2 está imersa num campo elétrico uniforme de intensidade E = $3{,}0 \cdot 10^5$ N/C. A superfície plana realiza um movimento de rotação uniforme, de modo que o ângulo α entre o vetor campo elétrico $\vec{E}$ e o versor $\vec{n}$, perpendicular à superfície, varia com o tempo segundo a função: $\alpha = \omega t$, onde ω é a velocidade angular. Construa o gráfico de α em função de t, considerando para t os valores 0, T/4, T/2, 3T/4, 2T, sendo T o período.

P3. Calcule os fluxos elétricos nas cinco superfícies mostradas. Dê as respostas em função de Q e da permissividade do meio ε.



P4. É dada uma esfera de raio R, na qual se distribuem cargas elétricas de densidade volumétrica ρ positiva e constante. Determine a intensidade do vetor campo elétrico num ponto interno que dista r do centro O da esfera e num ponto externo que dista d do centro O. Considere dada a permissividade ε do meio.

P5. É dada uma reta r, na qual se distribuem cargas elétricas de densidade linear λ positiva e constante. Determine a intensidade do vetor campo elétrico num ponto que está a uma distância d da reta. Considere dada a permissividade ε do meio.

Respostas:

P1

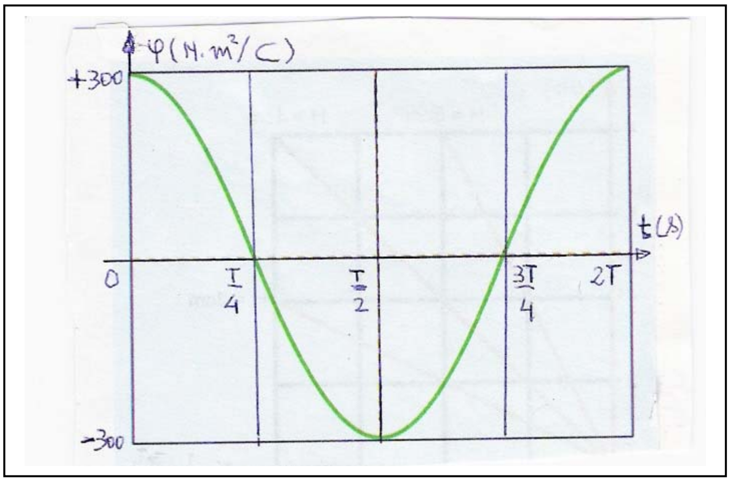
a) $600\ \dfrac{N \cdot m^2}{C}$

b) $300 \cdot \sqrt{3}\ \dfrac{N \cdot m^2}{C}$

c) $300\ \dfrac{N \cdot m^2}{C}$

d) zero

P2



P3. $\varphi_{S1} = \frac{+Q}{\varepsilon}$; $\varphi_{S2} = \frac{-Q}{\varepsilon}$; $\varphi_{S3} = \frac{+Q}{\varepsilon}$; $\varphi_{S4} = 0$; $\varphi_{S5} = \frac{+Q}{\varepsilon}$

P4. $E_{int} = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon}$; $E_{ext} = \frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon \cdot d^2}$

P5. $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon \cdot d}$