Os Fundamentos da Física

[8ª edição]

Ramalho, Nicolau e Toledo

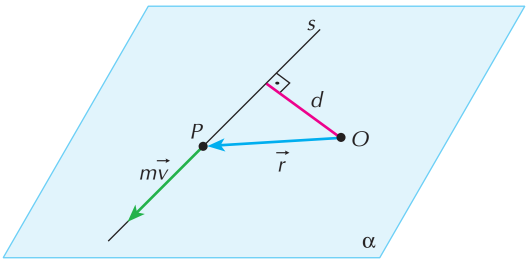
Tema especial

DINÂMICA DAS ROTAÇÕES

1. MOMENTO ANGULAR DE UM PONTO MATERIAL

Momento angular ou momento da quantidade de movimento $m\vec{v}$ de um ponto material P, em relação a um ponto O, é a grandeza vetorial $\vec{L}$ que possui as seguintes características:

- **Módulo:** $L = mvd$, sendo d a distância do ponto O à reta s, suporte da velocidade $\vec{v}$ (figura 1).



$L = mvd$
$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ (vetor posição)

Figura 1.

- **Direção:** da reta perpendicular ao plano α definido pela reta s e pelo ponto O.
- **Sentido:** dado pela regra da mão direita, como indicado na figura 2.

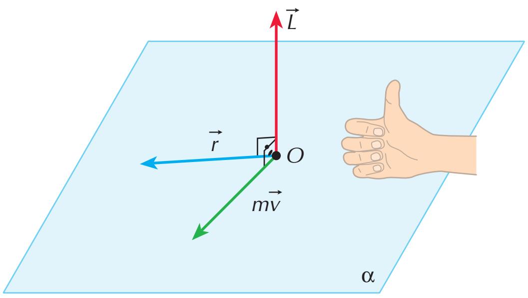


Figura 2. O dedo polegar indica o sentido de $\vec{L}$ quando os demais dedos são semidobrados no sentido de $\vec{r}$ para $m\vec{v}$.

No SI, a unidade do módulo do momento angular é $\text{kg} \cdot \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Editora Moderna Ltda.

Momento angular de um ponto material em movimento circular uniforme

Considere um ponto material P que realiza um movimento circular uniforme de centro O, com velocidade de módulo v e velocidade angular ω (figura 3).

Vamos calcular o módulo do momento angular L, em relação ao centro O. Temos: $L = mvd$; $d = R$; $v = \omega R$. Assim:

$$L = m\omega R \cdot R \Rightarrow L = mR^2 \omega$$

Vetorialmente, sendo $\vec{\omega}$ a **velocidade de rotação** — cujo sentido é o mesmo de $\vec{L}$ e cujo módulo é igual à velocidade angular ω — temos: $\vec{L} = mR^2\vec{\omega}$.

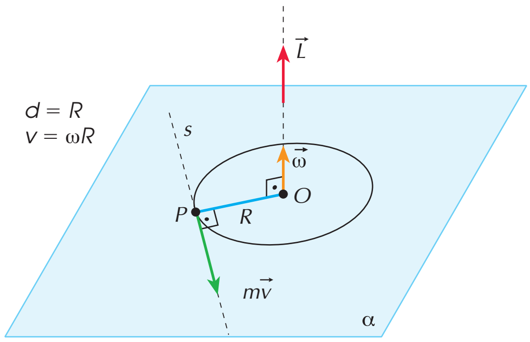


Figura 3.

Momento de inércia de um ponto material

A grandeza escalar mR^2, que aparece na conclusão anterior, é indicada pela letra I e recebe o nome de **momento de inércia do ponto material P em relação ao ponto O**: $I = mR^2$.

No SI, a unidade de momento de inércia é kg · m².

Assim, temos:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

2. MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

O momento angular $\vec{L}$ de um sistema de pontos materiais, em relação a um ponto O, é a soma vetorial dos momentos angulares dos pontos que constituem o sistema:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i}$$

Momento angular de um corpo extenso em rotação uniforme em torno de um eixo fixo

Considere um corpo em rotação uniforme, em torno de um eixo fixo (figura 4).

Para cada ponto P_i, de massa m_i e a uma distância r_i do eixo de rotação, podemos escrever: $\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega}$, sendo $\vec{\omega}$ o vetor de rotação, suposto constante.

O momento angular total $\vec{L}$ do corpo é dado por:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\vec{\omega}$$

Nesse caso, o momento de inércia I do corpo em relação ao eixo de rotação é dado por: $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$. Nestas condições, o momento angular do corpo é dado pela mesma equação aplicada ao ponto material:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

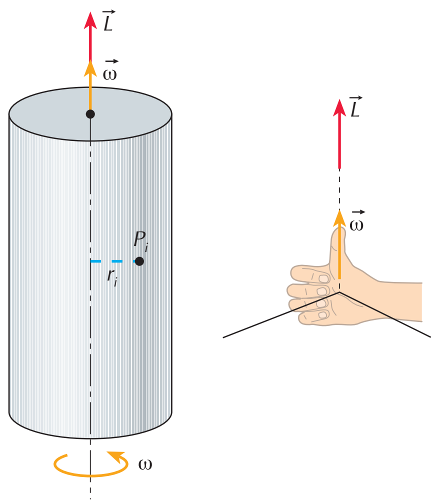


Figura 4.

Editora Moderna Ltda.

O momento de inércia I depende da massa do corpo e de como ela se distribui em relação ao eixo de rotação. O momento de inércia mede **a resistência que o corpo opõe à rotação**. De fato, partindo da igualdade $L = I\omega$, concluímos: para o mesmo L, quanto maior for I, menor é ω.

3. CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Se o momento (torque) das forças que atuam num corpo em rotação é nulo, então o momento angular permanece constante.

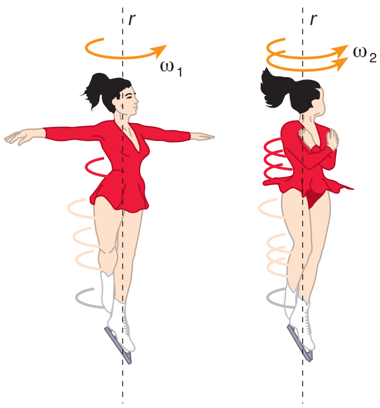
Nessas condições, resulta em módulo:

$$L = I\omega = \text{constante}$$

Se o corpo for deformável, sendo $L = I\omega$ constante, vem: se I aumenta, ω diminui e, se I diminui, ω aumenta.

É o caso da bailarina girando em torno de seu eixo vertical de rotação r com os braços estendidos e com velocidade angular ω_1, sendo I_1 seu momento de inércia em relação ao eixo r. Fechando os braços, o momento de inércia diminui para $I_2(I_2 < I_1)$ e sua velocidade angular passa a ser ω_2.

Como $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, resulta $\omega_2 > \omega_1$ (figura 5).



$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$

Figura 5.

Vejamos algumas situações envolvendo a **conservação do momento angular**.

3.1 Atleta realizando um salto mortal

Considere o eixo horizontal r que passa pelo centro de gravidade do atleta. À medida que o atleta sobe, seu momento de inércia em relação ao eixo r diminui e sua velocidade angular aumenta. Durante a descida, o momento de inércia aumenta e a velocidade angular diminui (figura 6).

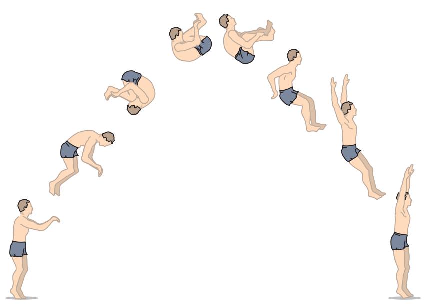


Figura 6.

Editora Moderna Ltda.

3.2 Cadeira giratória

O jovem da figura 7 encontra-se sentado numa cadeira giratória, sem encostar os pés no chão e com os braços estendidos. Uma outra pessoa gira a cadeira em torno do eixo vertical *r*. A seguir, o jovem fecha os braços. O momento de inércia do sistema, em relação ao eixo *r*, diminui; conseqüentemente, ele passa a girar mais depressa, isto é, sua velocidade angular aumenta.

O efeito observado é mais acentuado quando o jovem segura um par de halteres.

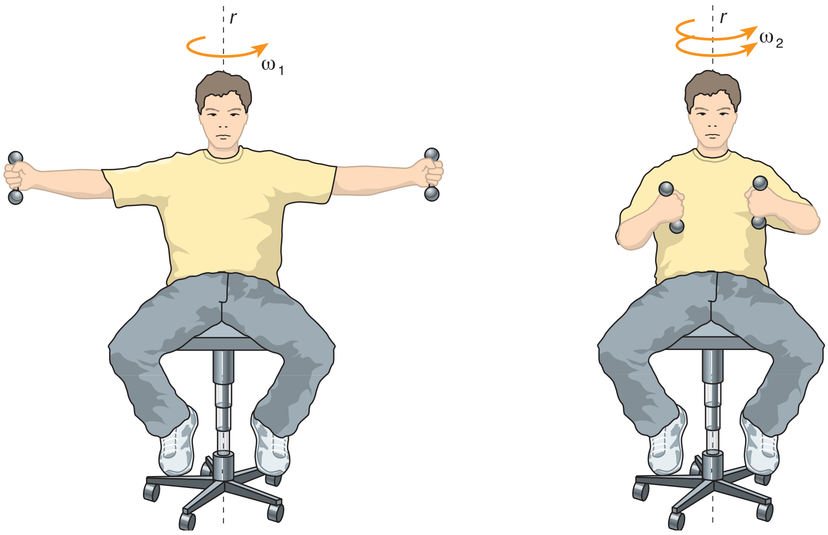


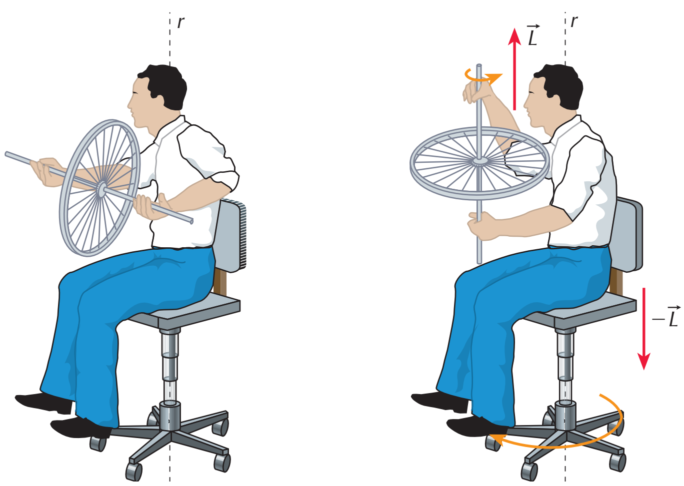
Figura 7.

Editora Moderna Ltda.

3.3 Cadeira giratória e roda de bicicleta

Considere uma cadeira que pode girar em torno de seu eixo vertical *r*, praticamente sem atrito. Uma pessoa encontra-se sentada na cadeira, sem encostar os pés no chão e segurando o eixo de uma roda de bicicleta. A roda, com seu eixo disposto horizontalmente, é colocada em rotação (figura 8a). A componente vertical do momento angular do sistema é nula. Como o torque externo vertical é nulo, há conservação da componente vertical do momento angular, isto é, a componente vertical do momento angular permanece nula.

Por outro lado, se a pessoa mantiver o eixo da roda na vertical, com a roda girando num certo sentido, a cadeira passa a girar em sentido oposto: os momentos angulares $\vec{L}$ e $-\vec{L}$ se anulam (figura 8b).



(a) Figura 8. (b)

3.4 Helicóptero e a hélice lateral traseira

Considere um helicóptero dotado, além da hélice principal, de uma hélice menor na lateral traseira (figura 9a).

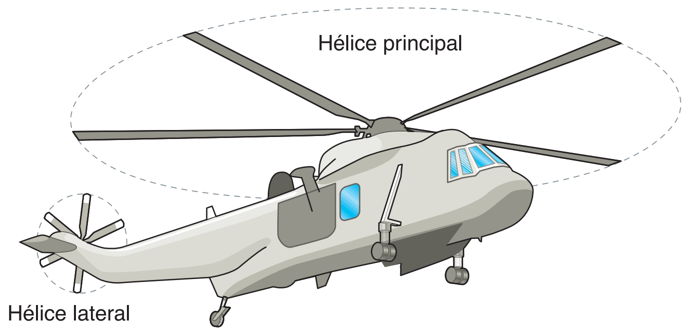


Figura 9a.

Quando o motor é ligado, a hélice principal gira, impulsionando o ar para baixo. Pelo princípio da ação-e-reação, o ar aplica na hélice uma força vertical para cima e, assim, o helicóptero sobe.

Qualquer variação da velocidade angular da hélice produz uma variação de seu momento angular. Seja $\vec{T}$ o torque das forças propulsoras, responsável por essa variação de momento angular da hélice e $-\vec{T}$ a reação do torque $\vec{T}$, agindo no corpo do helicóptero (figura 9b).

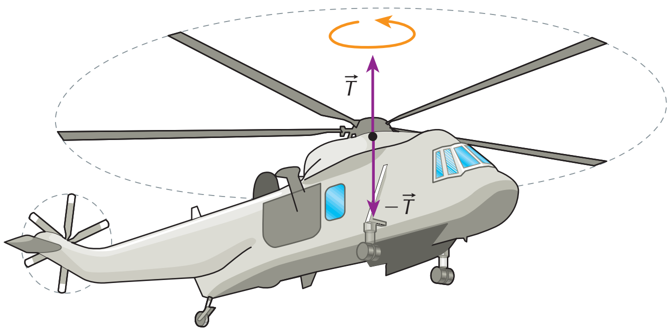


Figura 9b.

O torque $-\vec{T}$ tende a girar o corpo do helicóptero em sentido oposto ao da hélice principal. Para que isso não ocorra, é necessária a existência da hélice lateral. Esta, ao girar, empurra o ar e, pelo princípio da ação-e-reação, o ar empurra a hélice com uma força $\vec{F}$, que se transmite à cauda do helicóptero. O torque $\vec{T}'$ que a força $\vec{F}$ produz no corpo do helicóptero anula o torque $-\vec{T}$, o que dá estabilidade ao aparelho (figura 9c).

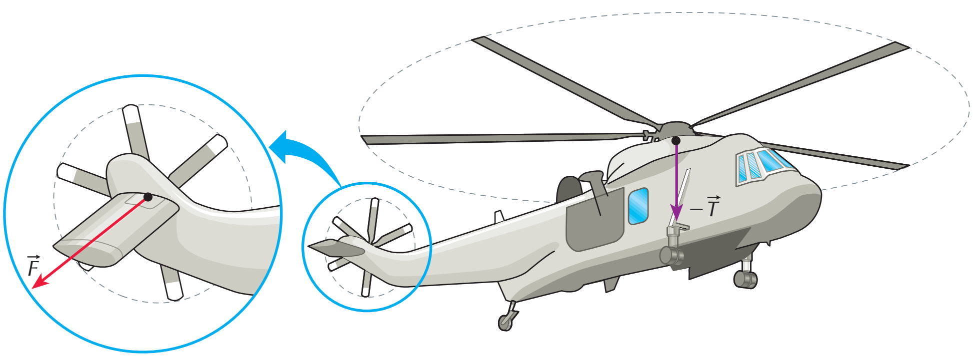


Figura 9c.

Editora Moderna Ltda.

Exercícios Resolvidos

R.1 Um ponto material de massa $m = 3{,}0$ kg realiza um movimento circular uniforme de raio $R = 0{,}5$ m e velocidade escalar $v = 10$ m/s. Seja O o centro da circunferência descrita. Calcule, em relação ao ponto O:

a) o momento de inércia do ponto material;

b) o módulo do momento angular do ponto material.

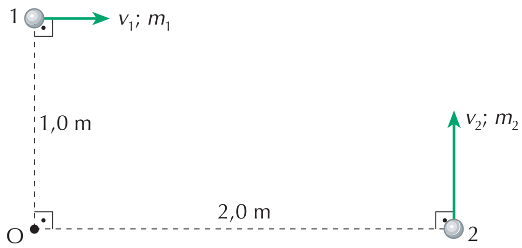
Solução:

a) De $I = mR^2$, sendo $m = 3{,}0$ kg e $R = 0{,}5$ m, vem: $I = 3{,}0 \cdot (0{,}5)^2 \Rightarrow \boxed{I = 0{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$

b) O módulo do momento angular é dado por: $L = mvR \Rightarrow L = 3{,}0 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{L = 15\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$

Respostas: a) $I = 0{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; **b)** $L = 15\ \text{kg} \cdot \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$

R.2 Calcule o módulo do momento angular de um sistema constituído de duas partículas, 1 e 2, em relação ao ponto O, no instante indicado na figura.
As massas e as velocidades das partículas 1 e 2 são, respectivamente:
$m_1 = 1{,}0$ kg; $m_2 = 2{,}0$ kg; $v_1 = 5{,}0$ m/s e $v_2 = 10$ m/s.



Solução:
Os módulos dos momentos angulares L_1 e L_2 das partículas 1 e 2 são dados por:

$$L_1 = m_1v_1d_1 = 1{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 1{,}0 \Rightarrow L_1 = 5{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$L_2 = m_2v_2d_2 = 2{,}0 \cdot 10 \cdot 2{,}0 \Rightarrow L_2 = 40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Aplicando a regra da mão direita, determinamos o sentido de $\vec{L}_1$: "entrando" no plano do papel. Pela mesma regra, concluímos o sentido de $\vec{L}_2$: "saindo" do mesmo plano. Assim, o módulo do momento angular do sistema de partículas é dado pela diferença dos módulos:

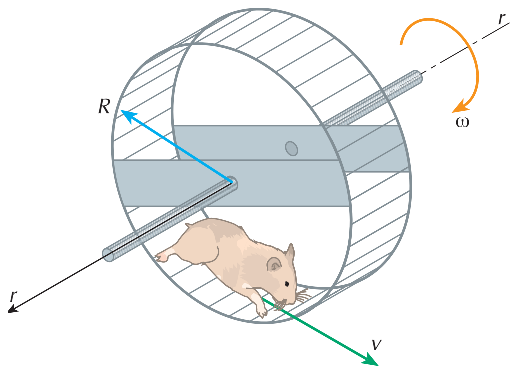
$$L = L_2 - L_1 \Rightarrow L = 40 - 5{,}0 \Rightarrow L = 35\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Resposta: $35\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

R.3 Um *hamster* é colocado numa gaiola cilíndrica, que pode girar sem atrito em torno de seu eixo r. O *hamster*, de massa m, começa a se deslocar com velocidade escalar constante igual a v, em relação ao solo. O raio da gaiola é R e seu momento de inércia, em relação ao eixo r, é I. Determine:

a) o módulo do momento angular do *hamster* em relação ao eixo r (considere o *hamster* um ponto material);

b) a velocidade angular da gaiola.



Solução:

a) O momento angular do *hamster* tem módulo dado por:

$$L_H = mvd$$

Sendo $d = R$, vem: $\boxed{L_H = mvR}$

Pela regra da mão direita concluímos que o sentido do vetor $\vec{L}_H$ é o do eixo r.

b) O módulo do momento angular da gaiola é dado por:

$$L_G = I\omega$$

O torque das forças que agem no sistema, em relação ao eixo de rotação, é nulo. Logo, há conservação do momento angular. Inicialmente o sistema está em repouso e o momento angular total é nulo. Para que o momento angular continue nulo, devemos impor que $\vec{L}_H$ e $\vec{L}_G$ tenham mesma direção, mesmo módulo e sentidos opostos. Note, então, que o sentido de $\vec{L}_G$ é oposto ao do eixo r e, por isso, o cilindro gira no sentido indicado na figura. Impondo $L_H = L_G$ (módulos iguais), resulta:

$$mvR = I\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{mvR}{I}}$$

Respostas: a) $L_H = mvR$; **b)** $\omega = \dfrac{mvR}{I}$

Editora Moderna Ltda.

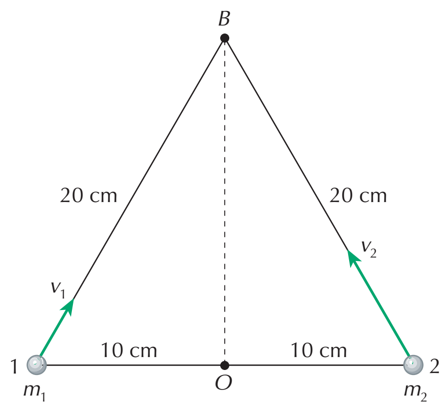
Exercícios Propostos

P.1 Um ponto material de massa $m = 1{,}0$ kg realiza um movimento circular uniforme de raio $R = 2{,}0$ m. Sendo O o centro da circunferência descrita, calcule:

a) O momento de inércia do ponto material, em relação ao ponto O.

b) O módulo da velocidade do ponto material, sabendo que o módulo de seu momento angular, em relação ao ponto O, é de 10 kg · m²/s.

P.2 Calcule o módulo do momento angular de um sistema constituído de duas partículas, 1 e 2, em relação aos pontos B e O, no instante indicado na figura.



As massas e as velocidades das partículas 1 e 2 são, respectivamente:
$m_1 = 2{,}0$ kg; $m_2 = 3{,}0$ kg; $v_1 = 4{,}0$ m/s e $v_2 = 6{,}0$ m/s.

Editora Moderna Ltda.

P.3 Ao longo da borda de uma plataforma horizontal, de forma circular de massa M e raio R, são dispostos trilhos. A plataforma e um pequeno trem de massa m, colocado sobre os trilhos, estão em movimento de rotação em torno do eixo vertical r, com velocidade angular ω_0 (figura a). Num certo instante o trem começa a se deslocar sobre os trilhos com velocidade de módulo u, em relação à plataforma. O sentido de movimento do trem é o mesmo sentido de rotação da plataforma (figura b).

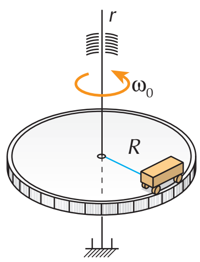


Figura a.

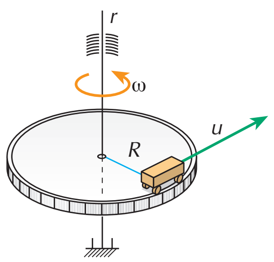


Figura b.

Despreze os atritos. Determine a nova velocidade angular ω da plataforma (o momento de inércia da plataforma em relação ao eixo r é dado por: $I = \dfrac{MR^2}{2}$).

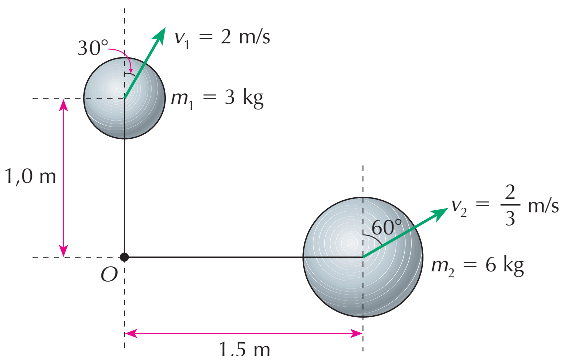
Testes Propostos

(Os testes **T.1** a **T.10** foram propostos pela Fuvest nas provas de transferência para a USP.)

T.1 Um corpo de massa 3 kg move-se a uma velocidade escalar constante de 4 m/s sobre um círculo de raio 5 m. Após algumas revoluções sobre o círculo, o corpo escapa e se movimenta em linha reta, mantendo o mesmo valor de velocidade e a mesma direção do instante de escape. O momento angular do corpo antes de escapar e o momento angular do corpo após o escape, calculados em relação ao centro do círculo são (em kg · m²/s), respectivamente, de:

a) 12 e 0 c) 60 e 60 e) 60 e 0
b) 12 e 12 d) 60 e 12

T.2 Dois objetos estão se movendo como mostra a figura abaixo.

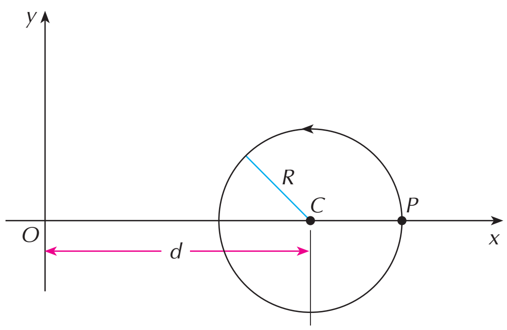


O momento angular total em torno do ponto O é (no SI) de:

a) 12 b) 10 c) 6 d) 2 e) 0

(Use este enunciado para resolver as questões **T.3** e **T.4**.)

Um corpo de massa m percorre, com velocidade angular constante ω, em sentido anti-horário, uma trajetória circular de raio R, cujo centro C dista d da origem O do sistema de coordenadas xy, como mostra a figura.



T.3 Sabendo que o corpo está passando pelo ponto P no instante $t = 0$, a equação que descreve sua posição r em relação à origem do sistema de coordenadas, em função do tempo t, é dada por:

a) $\vec{r} = (d + R \cdot \cos\omega t)\,\vec{i} + R \cdot \operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}$
b) $\vec{r} = (R + d) \cdot \cos\omega t\,\vec{i} + R \cdot \operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}$
c) $\vec{r} = R\vec{i} + R\vec{j}$
d) $\vec{r} = (R + d) \cdot \operatorname{sen}\omega t\,\vec{i} + (R + d) \cdot \cos\omega t\,\vec{j}$
e) $\vec{r} = (d + R)\,\vec{i} + R\vec{j}$

T.4 Durante o movimento, o valor máximo do módulo do momento angular do corpo em relação à origem do sistema de coordenadas é:

a) $m\omega R^2$ d) $m\omega(d + R)^2$
b) $m\omega R(d - R)$ e) $m\omega Rd$
c) $m\omega R(d + R)$

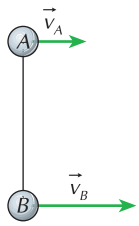
T.5 Uma plataforma circular, de massa M e raio R, gira livremente, com velocidade angular ω, em torno de um eixo fixo, perpendicular a ela, passando pelo seu centro. Seu momento de inércia em relação a esse eixo é $I = \frac{MR^2}{2}$. Uma pequena bola de material viscoso, de massa m, cai verticalmente sobre a plataforma, à distância $\frac{R}{2}$ do seu centro, grudando-se nela instantaneamente. A velocidade angular final da plataforma é:

a) $\frac{M - m}{M}\omega$ d) $\frac{2M - m}{2M}\omega$
b) $\frac{M + m}{M}\omega$ e) $\frac{2M}{2M + m}\omega$
c) $\frac{M}{M + m}\omega$

T.6 No instante $t = 0$, uma partícula de massa m é abandonada, em repouso, no ponto $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{k}$, sob a ação da gravidade, cuja aceleração é representada por $\vec{g} = -g\vec{k}$. O torque e o momento angular da partícula, em relação à origem do sistema de coordenadas e em função do tempo t são, respectivamente:

a) $mga\,\vec{k}$; $mgat\,\vec{k}$ d) zero; zero
b) $mga\vec{j}$; $mgat\,\vec{j}$ e) $mgb\,\vec{k}$; zero
c) zero; $mgat\,\vec{j}$

T.7 Um sistema é formado por dois corpos A e B, ambos com massa m e ligados por uma haste de comprimento L. Num dado instante, as velocidades dos dois corpos são paralelas entre si e perpendiculares à barra, sendo $|\vec{v}_A| = v$ e $|\vec{v}_B| = 2v$, como mostra a figura.



O módulo do momento angular do sistema em relação ao seu centro de massa vale:

a) mLv c) $\frac{3mLv}{2}$ e) $2mLv$
b) $\frac{mLv}{2}$ d) zero

Editora Moderna Ltda.

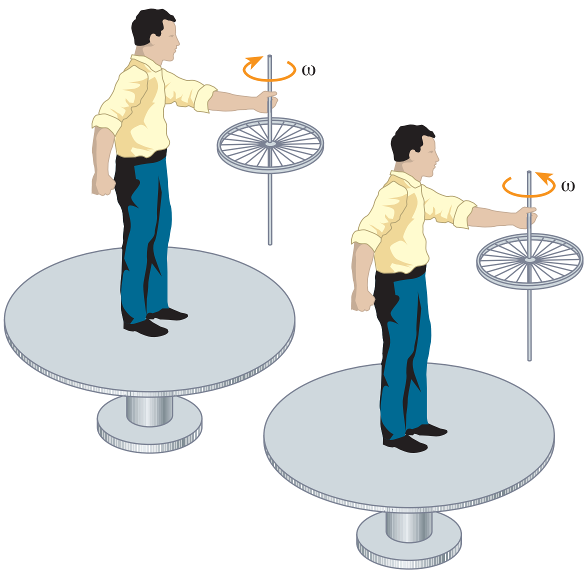
T.8 Uma pessoa de massa m está parada na borda de uma plataforma horizontal, de forma circular, com raio R e momento de inércia I, que pode girar livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo centro desse círculo. Inicialmente, a plataforma está em repouso em relação ao solo. Num dado instante, a pessoa começa a andar ao longo da borda da plataforma, até atingir uma velocidade de módulo v em relação ao solo. Nesse instante, a velocidade angular da plataforma vale:

a) zero
b) $\frac{v}{R}$
c) $\frac{mvR}{I}$
d) $\frac{Iv}{mR^3}$
e) $\frac{v}{\sqrt{\frac{m}{I}}}$

T.9 Uma partícula de massa $m = 2{,}0$ kg move-se no plano xy ao longo de uma reta paralela ao eixo y, em $x = 5{,}0$ m, com velocidade $\vec{v} = -3{,}0t\ \vec{j}$ m/s. O módulo do momento angular da partícula, em $kg \cdot m^2/s$, e o torque da força resultante sobre a partícula, em $N \cdot m$, ambos em relação à origem, no instante $t = 2{,}0$ s, são iguais, respectivamente, a:

a) 60 e 30
b) 60 e 60
c) 30 e 100
d) 60 e 100
e) zero e zero

T.10 João encontra-se em pé, em repouso, sobre uma plataforma horizontal que pode girar livremente, sem atrito, em torno de um eixo vertical. A plataforma está parada e João está segurando uma roda de bicicleta, de momento de inércia I, que gira com velocidade angular constante ω, em torno do eixo vertical, em sentido horário, quando vista de cima. Em certo instante, João inverte a posição da roda de bicicleta de tal forma que ela passa a girar com a mesma velocidade angular ω, mas em sentido anti-horário quando vista de cima. Nessa situação final, o sistema formado pela plataforma e por João, quando visto de cima, tem momento angular de módulo igual a:



a) zero.
b) $I\omega$ e gira em sentido horário.
c) $I\omega$ e gira em sentido anti-horário.
d) $2I\omega$ e gira em sentido horário.
e) $2I\omega$ e gira em sentido anti-horário.

(Os testes **T.11** a **T.16** foram propostos no Exame Nacional de Física para acesso ao Ensino Superior em Portugal.)

T.11 Uma haste, de massa desprezível e comprimento d, roda, no plano xOy, em torno de um eixo fixo que passa pelo ponto médio O da haste e é perpendicular ao referido plano. Nas extremidades da haste encontram-se presas duas esferas de massas m_1 e m_2.
O módulo do momento angular do sistema, em relação ao ponto O, num instante em que a velocidade das esferas, supostas pontos materiais, tem módulo v, é:

a) zero
b) $(m_1 + m_2)\frac{v}{d}$
c) $(m_1 + m_2)\frac{v}{2d}$
d) $(m_1 + m_2)vd$
e) $(m_1 + m_2)\frac{vd}{2}$

T.12 Dois patinadores, cada um de massa m, movem-se numa pista de gelo em trajetórias paralelas, separadas entre si por uma distância d, com velocidades de igual módulo v e de sentidos opostos.
O módulo do momento angular do sistema constituído pelos dois patinadores, em relação a qualquer ponto, é:

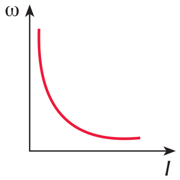
a) mvd
b) $2mvd$
c) mv
d) zero
e) $\frac{mvd}{2}$

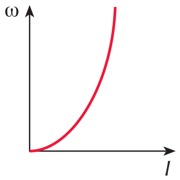
T.13 Uma criança senta-se num banco giratório com os braços encostados ao corpo e pede que façam girar o banco em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do sistema *criança + banco*. Num dado instante, com o sistema *criança + banco* a girar solidariamente, a criança abre os braços e volta a encostá-los ao corpo. Considere desprezível o efeito do atrito entre o banco e o eixo vertical.
Selecione a afirmação verdadeira.

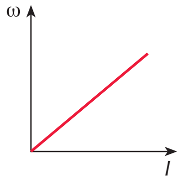
a) Quando a criança abre os braços, o momento de inércia do sistema, em relação ao eixo de rotação, diminui.
b) Quando a criança abre os braços, o módulo da velocidade angular do sistema diminui.
c) Quando a criança fecha os braços, o momento de inércia do banco, em relação ao seu centro de massa, diminui.
d) Quer a criança abra ou feche os braços, o módulo da velocidade angular do sistema mantém-se.
e) Quer a criança abra ou feche os braços, o momento angular do banco, em relação ao eixo de rotação, mantém-se.

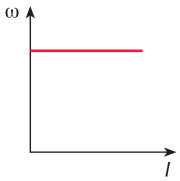
Editora Moderna Ltda.

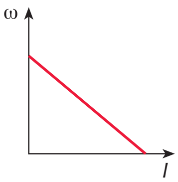
T.14 Uma bailarina, com os braços cruzados sobre o peito, rodopia com velocidade angular $\vec{\omega}$, numa pista de gelo horizontal. Quando a bailarina abre os braços, fazendo variar o seu momento de inércia I em relação ao eixo de rotação, que se mantém fixo, a sua velocidade angular diminui. O gráfico que traduz como varia o módulo da velocidade angular ω em função do momento de inércia I da bailarina é:

a) 

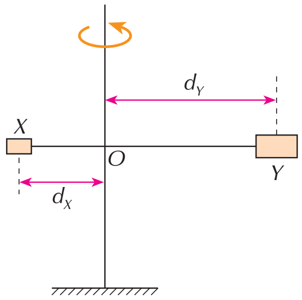
b) 

c) 

d) 

e) 

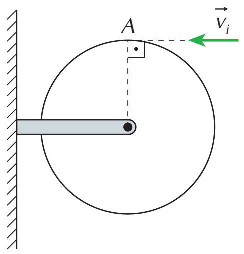
T.15 Dois corpos, X e Y, de massas respectivamente m_X e $m_Y = 2\,m_X$, estão fixos numa haste que pode rodar em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto O. As distâncias do centro de massa dos corpos X e Y ao ponto O são, respectivamente, d_X e $d_Y = 2d_X$. A massa da haste é desprezível em relação à massa de cada um dos corpos.



Qual das expressões traduz o módulo do momento de inércia do sistema $X + Y$ em relação ao eixo vertical?

a) $9m_X \cdot d_X^2$
b) $2m_X \cdot d_X^2$
c) $5m_X \cdot d_X^2$
d) $3m_X \cdot d_X^2$
e) $8m_X \cdot d_X^2$

T.16 Um disco de massa M e raio R pode rodar com atrito desprezível em torno de um eixo que lhe é perpendicular e passa pelo seu centro. O momento de inércia do disco, em relação ao eixo de rotação, é $\frac{1}{2}MR^2$. O disco, inicialmente em repouso, é atingido por um pedaço de plasticina, de massa m e velocidade $\vec{v}_i$, que se cola no ponto A de sua periferia, como indica a figura.



O módulo da velocidade do pedaço de plasticina, imediatamente após se ter colado ao disco, é:

a) $\dfrac{2mv_i}{2m + M}$

b) $\dfrac{mv_i}{2m + M}$

c) $\dfrac{2mv_i}{M}$

d) v_i

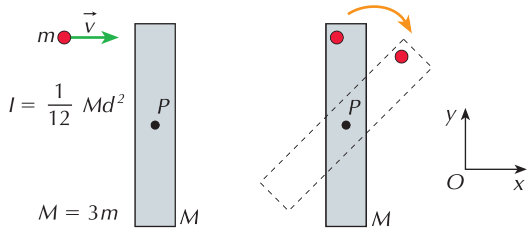
e) zero

Editora Moderna Ltda.

Exercícios

(Propostos no Exame Nacional de Física para acesso ao Ensino Superior em Portugal.)

P.4 Uma haste homogênea de comprimento d e momento de inércia I pode rodar, sem atrito, em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro P e é perpendicular ao plano xOy. Inicialmente a haste está em repouso na posição vertical. Um projétil de massa m e velocidade horizontal $\vec{v}$ colide com a haste, ficando incrustado na extremidade desta.



a) Qual é o momento resultante das forças aplicadas ao sistema *haste* + *projétil* durante a colisão?

b) Estabeleça uma expressão para a velocidade angular da haste, logo após a colisão, em função de v e d.

P.5 Um carrossel começa a rodar e adquire, ao fim de 1 minuto, velocidade constante igual a 0,5 volta por segundo. Uma criança de pé sobre o carrossel, à distância de 2,0 m do respectivo eixo de rotação, tem um momento angular igual a 100π J · s.

Considerando $g = 10$ m/s², determine:

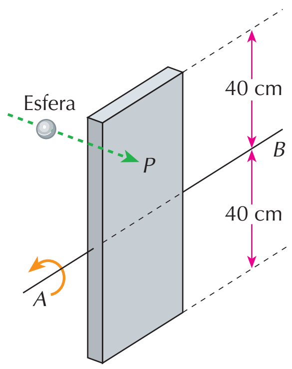
a) o valor do peso da criança;

b) o valor da força de atrito que se deve exercer sobre a criança para que ela não deslize sobre a plataforma, supondo que não tem qualquer outro suporte.

P.6 A figura representa uma placa retangular homogênea e de espessura constante, que roda em torno do eixo horizontal AB, com velocidade angular $\omega_0 = 7{,}0$ rad · s^{-1}, no sentido indicado.

O momento de inércia da placa em relação ao eixo referido é de $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ kg · m². Despreze os atritos.

Uma pequena esfera, de massa igual a 50 g, deslocando-se na horizontal no instante em que colide perpendicularmente à placa, incrusta-se nela no ponto P; este ponto é o centro de massa da metade superior da placa. A velocidade angular do sistema, logo após a incrustação, reduz-se para 1,8 rad · s^{-1}, continuando a placa a rodar no mesmo sentido.



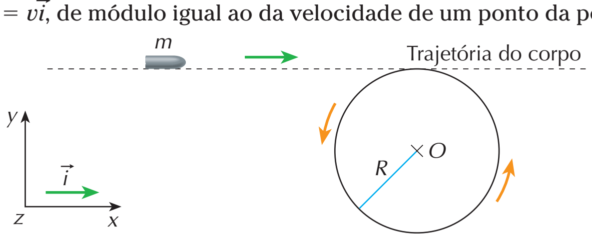
a) Determine o momento de inércia do sistema, em relação ao eixo AB, após a incrustação da esfera.

b) Calcule o módulo da velocidade da esfera, imediatamente antes do impacto com a placa.

c) Determine o módulo da variação do momento linear da esfera entre os instantes imediatamente antes do choque e logo após a incrustação na placa.

P.7 Um disco homogêneo, de massa M e raio R, roda numa superfície plana e horizontal com velocidade angular constante de módulo ω, no sentido indicado na figura, em torno de um eixo fixo, que passa pelo centro O do disco. O momento de inércia do disco em relação ao eixo referido é $I = \frac{1}{2} MR^2$ e o módulo da velocidade de qualquer dos pontos da sua periferia é v.

Um corpo de massa $m = \frac{M}{2}$ é lançado horizontalmente segundo uma trajetória retilínea tangente ao disco com uma velocidade $\vec{v} = v\vec{i}$, de módulo igual ao da velocidade de um ponto da periferia do disco.



Admita que, imediatamente após a colisão, o corpo segue na mesma direção e sentido que tinha antes da colisão. Despreze os efeitos do atrito no eixo do disco, entre o corpo e a superfície horizontal e entre o disco e essa superfície.

a) Represente as forças de interação entre o disco e o corpo, durante a colisão. Tenha atenção no tamanho relativo dos vetores.

b) Mostre que é nulo o momento angular do sistema *disco* + *corpo*, imediatamente antes da colisão, em relação ao ponto O.

c) Qual é a relação entre o módulo, a direção e o sentido do momento angular do disco e o módulo, a direção e o sentido do momento angular do corpo, imediatamente após a colisão, relativamente ao ponto O?

Editora Moderna Ltda.

Respostas

Complemento

Dinâmica das Rotações

Exercícios propostos

P.1 a) $4{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
b) $5{,}0 \text{ m/s}$

P.2 $L_B = 0$; $L_O = 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2\text{/s}$

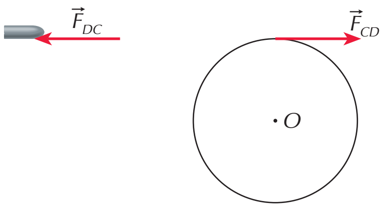
P.3 $\omega = \omega_0 - \dfrac{mu}{(0{,}5M + m)R}$

P.4 a) O momento resultante é nulo.
b) $\omega = \dfrac{v}{d}$

P.5 a) $2{,}5 \cdot 10^2 \text{ N}$
b) $4{,}9 \cdot 10^2 \text{ N}$

P.6 a) $2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
b) $10{,}04 \text{ m/s}$
c) $5{,}2 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

P.7 a)



$\vec{F}_{DC}$: força exercida pelo disco sobre o corpo
$\vec{F}_{CD}$: força exercida pelo corpo sobre o disco
$\vec{F}_{DC} = -\vec{F}_{CD}$: (ação-e-reação)

b) Módulo do momento angular do corpo em relação ao ponto O:

$$L_C = \frac{M}{2} \cdot v \cdot R \quad \textbf{(1)}$$

Módulo do momento angular do disco em relação ao ponto O:

$$L_D = I \cdot \omega \Rightarrow L_D = \frac{1}{2} \cdot MR^2 \cdot \frac{v}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_D = \frac{M}{2} \cdot v \cdot R \quad \textbf{(2)}$$

De **(1)** e **(2)**, resulta: $L_C = L_D$
Pela regra da mão direita, pode-se concluir que $\vec{L}_C$ e $\vec{L}_D$ têm mesma direção e sentidos opostos. Logo: $\vec{L}_C + \vec{L}_D = \vec{0}$

c) Os momentos angulares do corpo e do disco apresentam mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

Testes propostos

T.1 c	**T.2** e	**T.3** a	**T.4** c
T.5 e	**T.6** b	**T.7** b	**T.8** c
T.9 a	**T.10** d	**T.11** e	**T.12** a
T.13 b	**T.14** a	**T.15** a	**T.16** a

Editora Moderna Ltda.